BESTIMMUNG DER DIELEKTRICITÄTSCONSTANTEN VON KRYSTALLEN IM HOMOGENEN ELEKTRISCHEN FELDE.

INAUGURAL-DISSERTATION

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT (II. SECTION)

DER

KÖNIGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT AM 30. MAI 1899

VON

ROBERT FELLINGER.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1899.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt.

Seite

Einleitung.

Arbeiten über die Dielektricitätsconstante von Krystallen 5
Methode von Graetz und Fomm 7

Theorie.

I. Allgemeine Theorie 8
II. Specialisirung 10
Verwendbarkeit von Scheiben und Stäbchen 12
Formeln für optisch zweiaxige Krystalle 14
Formeln für optisch einaxige Krystalle 17

Versuchsanordnung.

Das elektrische Feld. Spannungsmessung 19
Befestigung der Krystallschnitte 19
Aufhängefaden. Cocon, Metall, Quarz 21
Befestigung von Quarzfäden 22
Schutzvorrichtungen. Schaltung 25

Die Messungen.

Vorbereitende Messungen 25
Controlmessungen 27
Einaxige Krystalle 29
Zweiaxige Krystalle 40
Tabelle 45

Einleitung.

Arbeiten über die Dielektricitätsconstante von Krystallen.

Die Maxwell'sche Theorie, welche einen Zusammenhang zwischen optischen, elektrischen und magnetischen Bewegungsvorgängen in einem Körper giebt, lässt erwarten, dass in nichtleitenden Krystallen die Brechungserscheinungen des Lichtes mit dem dielektrischen Verhalten in gesetzmässiger Beziehung stehen, und demnach die Constante der Dielektricität nach verschiedenen Richtungen in dem Krystall nicht dieselbe sei. Das gewöhnlich hieraus deducirte Gesetz, dass die Dielektricitätsconstante dem Quadrate der Constante der Cauchy'schen Dispersionsformel, also dem Quadrate des Brechungsexponenten für unendlich lange Wellen, entspreche, erschien eine Zeit lang glänzend bewiesen durch die Resultate der Messungen, welche Boltzmann[1]), im Jahre 1874, mit Schwefelkrystallen ausführte. Hier zeigte sich thatsächlich eine sehr gute Uebereinstimmung der Brechungsindices nach den drei Hauptrichtungen mit der Wurzel aus der Dielektricitätsconstante nach denselben Richtungen. Bis heute aber blieb dies das einzige Beispiel für eine solche Uebereinstimmung; sämmtliche, für andere Krystalle gefundenen Dielektricitätsconstanten ergaben Werthe, welche bedeutend höher sind als die Quadrate der entsprechenden Brechungsindices.

Bevor ich näher auf diese Thatsache eingehe, möchte ich eine kurze Uebersicht der wenigen, auf diesem Gebiete vorhandenen Arbeiten geben.

Als grundlegend für die Bestimmung der Dielektricitätsconstanten von Krystallen dürfte die oben erwähnte Arbeit

[1]) Boltzmann, Wiener Ber. 70. II. p. 342. 1874.

von Boltzmann, „Ueber die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen", zu betrachten sein. Er bediente sich einer schon vorher von ihm für amorphe Körper angewandten Methode[1]), die darauf beruht, dass eine feststehende, geladene Metallkugel auf eine frei aufgehängte Kugel aus dem zu untersuchenden Dielektricum wirkt. Der durch die Anziehung entstehende Ausschlagswinkel giebt ein Maass zur Berechnung der Dielektricitätsconstante.

Mittels derselben Methode untersuchten Boltzmann's Schüler, Romich und Nowak[2]), andere Krystalle und zwar: Quarz, Kalkspath und Flussspath.

Die bedeutendste und umfassendste Arbeit über die dielektrischen Eigenschaften der Krystalle erschien im Jahre 1888 von Jacques Curie[3]) unter dem Titel „Recherches sur le pouvoir inducteur spécifique et la conductibilité des corps cristallisés". Curie stellte sich zu seinen Messungen aus kleinen, nach den verschiedenen Axenrichtungen geschnittenen Krystallplatten, durch zweiseitigen Silber- oder Stanniolbelag, Condensatoren her. Als Messinstrument verwendete er einen von ihm selbst ein paar Jahre vorher construirten Apparat, seinen „Quartz piézo-électrique"[4]), in Verbindung mit einem Quadrantenelektrometer. — Er bestimmte nach seiner Methode die Dielektricitätsconstante von: Quarz, Kalkspath, Flussspath, Turmalin, Beryll, Glimmer, Topas (unvollkommen), Gips, Steinsalz, Alaun, Schwefel, Ebonit und Porzellan. — Die von Curie, sowie den anderen Beobachtern bestimmten Werthe sollen bei der Besprechung meiner Versuche, zum Vergleich mit den von mir gefundenen, angegeben werden.

Die Curie'sche Methode hat gegenüber der Boltzmann'schen den unverkennbaren Vortheil, dass bei ihr die, besonders aus harten und spröden Krystallen, schwer herstellbare Kugelform vermieden ist. Andererseits kann letztere schon mit sehr wenig Material durchgeführt werden, während

---

[1]) Boltzmann, Wiener Ber. **68.** II. p. 81. 1873.
[2]) Romich und Nowak, Wiener Ber. **70.** II. p. 380. 1874.
[3]) Curie, Annales de chimie et de physique **6.** Serie 17. p. 385. 1889.
[4]) l. c. **6.** Serie 17. p. 392. 1889.

Curie's Methode grössere Krystallpartien erfordert, die, nach einer bestimmten Richtung des Krystalles, nicht immer erhältlich sind.

Methode von Graetz und Fomm.

Eine neue Methode zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten wurde im Jahre 1893 von Graetz und Fomm[1]) veröffentlicht. Sie beruht auf der Erscheinung, dass in einem von elektrischen Schwingungen durchzogenen, homogenen Felde dielektrische Körper, von einer gegen die Feldrichtung unsymmetrischen Form, Drehmomente erleiden, welche streben, den Körper mit der Richtung seiner grössten Ausdehnung in die Richtung der Kraftlinien einzustellen. Die Theorie, auf welche später hier näher eingegangen werden soll, fordert für das zu untersuchende Dielektricum die Form eines Rotationsellipsoides, dessen Rotationsaxe eine zur Kraftlinienrichtung geneigte Stellung einnimmt. Da die exacte Herstellung eines Ellipsoides erhebliche Schwierigkeiten bereiten würde, kann man dieses durch eine dünne, kreisförmige Scheibe oder ein cylindrisches Stäbchen, dessen Durchmesser sehr klein ist gegenüber seiner Länge, ersetzen. Beide Formen sind als specielle Fälle eines Rotationsellipsoides zu betrachten. Graetz und Fomm verwendeten bei ihren Untersuchungen sowohl Stäbchen als Scheiben. Dieselben wurden, durch einen Glasstab fest mit einem kleinen Spiegel verbunden, an Cocon- oder Metallfaden zwischen den Platten eines Kohlrausch'schen Condensators aufgehängt, welcher von der Secundärspule eines Inductoriums wechselnde Ladungen erhielt. Die durch Spiegel und Scala ermittelten Ausschläge, das heisst Drehungen, der Scheiben bez. Stäbchen geben das Maass zur Berechnung der Dielektricitätsconstante. Mittels dieser Methode bestimmten Graetz und Fomm unter anderem auch die Dielektricitätsconstante einer senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Beryllscheibe. Die Bestimmung geschah durch Vergleich der Ausschläge mit denjenigen einer Schwefelscheibe von bekannter Dielektricitätsconstante.

---

[1]) Graetz und Fomm, Wied. Ann. **53.** p. 85. 1894; Sitzungsber. d. bayr. Akad. **23.** p. 275. 1893.

Dieselbe Methode nahm später Lombardi[1]) auf, wobei er die Versuchsanordnung in der Weise abänderte, dass die wechselnden Ladungen der Condensatorplatten aus einer grossen Accumulatorenbatterie mittels eines Commutators entnommen würden, und ferner die unifilare Aufhängung durch eine über 1 Meter lange bifilare (Coconfaden) ersetzt war. Lombardi untersuchte auf diese Weise: Paraffin, Stearin, Wachs, Wallrath, Colophonium, Schwefel und Ebonit.

Als allgemein zu verwendende Methode zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten ist die von Graetz und Fomm vielleicht weniger zu empfehlen als manche andere, vorher angewandte, da sie in ihrer Anordnung umständlich ist und ferner in einigen technischen Kleinigkeiten für jeden einzelnen zu untersuchenden Körper von neuem eine ausserordentliche Präcision erfordert. Da sie aber von der zu untersuchenden Materie nur eine äusserst kleine Menge erforderlich macht, gewinnt sie die grösste Bedeutung für Substanzen, welche nur in geringer Menge zu beschaffen sind, entweder ihrer Seltenheit wegen, oder weil ihnen die Natur durch bestimmte Formgebung Beschränkung auferlegt, wie es bei den Krystallen der Fall ist.

Die Anregung, die Dielektricitätsconstanten von Krystallen im homogenen, elektrischen Felde zu ermitteln, verdanke ich Hrn. Professor Graetz. Und in vorliegender Arbeit möchte ich versuchen, eine Darstellung der Theorie und Ausführung diesbezüglicher Versuche zu geben.

Theorie.

I. Allgemeine Theorie.

Um den allgemeinsten Fall zu betrachten, denken wir uns ein aus einem optisch zweiaxigen Krystall geschnittenes Ellipsoid, dessen Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

[1]) Lombardi, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Serie II. Tom. XLV. p. 171. 1895.

in einem homogenen, elektrischen Felde. Wirken in der Richtung der x-, y-, z-Axen die inducirenden Kräfte X, Y, Z, so sind, vorausgesetzt, dass die Axen des Ellipsoides mit den Hauptrichtungen der Dielektricität a, b, c zusammenfallen, die dielektrischen Momente, die das Ellipsoid pro Volumeneinheit erfährt:

$$\alpha = \frac{\varkappa_1 X}{1 + \varkappa_1 A}, \quad \beta = \frac{\varkappa_2 Y}{1 + \varkappa_2 B}, \quad \gamma = \frac{\varkappa_3 Z}{1 + \varkappa_3 C},$$

worin A, B, C Constanten bedeuten, die von dem Verhältniss der Axen des Ellipsoides abhängig sind, und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Dielektrisirungsconstanten, welche mit den Dielektricitätsconstanten in dem einfachen Verhältniss stehen:

$$D_1 = 1 + 4\pi\varkappa_1, \quad D_2 = 1 + 4\pi\varkappa_2, \quad D_3 = 1 + 4\pi\varkappa_3.$$

Für unsere Betrachtung nehmen wir ein Rotationsellipsoid an, dessen Rotationsaxe die x-Axe sei. Die x- und y-Axe mögen in einer horizontalen Ebene liegen, und die Kraftlinien des Feldes ebenfalls horizontal verlaufen. Bildet nun die elektrische Kraft P mit der x-Axe den Winkel φ, sodass

$$X = P\cos\varphi, \quad Y = P\sin\varphi, \quad Z = 0,$$

so ergiebt sich das dielektrische Moment des Ellipsoides, wenn V das Volumen desselben bedeutet:

$$m = V\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = V\sqrt{\frac{\varkappa_1^2 X^2}{(1 + \varkappa_1 A)^2} + \frac{\varkappa_2^2 Y^2}{(1 + \varkappa_2 B)^2}}$$

oder

$$m = VP\sqrt{\frac{\varkappa_1^2 \cos^2\varphi}{(1 + \varkappa_1 A)^2} + \frac{\varkappa_2^2 \sin^2\varphi}{1 + \varkappa_2 B)^2}}.$$

Wird nun durch die drehende Wirkung der Kraft P der Winkel φ um einen Winkel δ geändert, und zwar, nehmen wir an, verkleinert, sodass

$$\alpha = m\cos(\varphi - \delta), \quad \beta = m\sin(\varphi - \delta),$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \delta) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \cdot \frac{1 + \varkappa_1 A}{1 + \varkappa_2 B} \operatorname{tg}\varphi,$$

so stellt sich das Drehungsmoment um die z-Axe dar:

$$\mathfrak{D} = V(\alpha Y - \beta X) = V\left(\frac{\varkappa_1}{1 + \varkappa_1 A} = \frac{\varkappa_2}{1 + \varkappa_2 B}\right) XY,$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2 + \varkappa_1 \varkappa_2 (B - A)}{(1 + \varkappa_1 A)(1 + \varkappa^2 B)} \cdot \frac{VP^2 \sin 2\varphi}{2}.$$

Diesem Brechungsmoment wird durch die Torsion des Aufhängefadens das Gleichgewicht gehalten. Bezeichnen wir das Torsionsmoment des Fadens mit M und setzen, wie es für die Versuche am günstigsten ist, $2\varphi = (\pi/2)$, so ergiebt sich:

$$M\delta = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2 + \varkappa_1\varkappa_2(B-A)}{2(1+\varkappa_1 A)(1+\varkappa_1 B)} VP^2 \cos 2\delta.$$

Setzen wir nun $(\delta/\cos 2\delta) = p_1$, so wird:

$$\text{(I)} \qquad Mp_1 = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2 + \varkappa_1\varkappa_2(B-A)}{2(1+\varkappa_1 A)(1+\varkappa_2 B)} VP^2.$$

Betrachten wir nun ein zweites, dem ersten gleich geformtes Ellipsoid, wieder um die z-Axe drehbar aufgehängt, bei welchem aber die Richtung der x-Axe die Dielektrisirungsconstante $\varkappa_2$ habe, so erhalten wir:

$$\text{(II)} \qquad Mp_2 = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_2(B-A)}{2(1+\varkappa_2 A)(1+\varkappa_1 B)} VP^2,$$

vorausgesetzt, dass M, P und V und somit auch A und B ungeändert sind. Für ein drittes, unter denselben Bedingungen, diesmal aber um die $a- = z$-Axe drehbar aufgehängtes Ellipsoid, wobei die x-Axe die Dielektrisirungsconstante $\varkappa_3$ haben soll, ergiebt sich ebenso:

$$\text{(III)} \begin{cases} Mp_3 = \dfrac{\varkappa_3 - \varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3(B-A)}{2(1+\varkappa_3 A)(1+\varkappa_2 B)} VP^2, \\ \text{oder, wenn man } b = z \text{ als Drehungsaxe annimmt:} \\ Mp_3' = \dfrac{\varkappa_3 - \varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_3(B-A)}{2(1+\varkappa_3 A)(1+\varkappa_1 B)} VP^2. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ und daraus die Dielektricitätsconstanten D_1, D_2, D_3 bestimmen.

Für einen optisch einaxigen Krystall, welcher nur zwei Hauptrichtungen der Dielektricität besitzt, genügen zur vollständigen Bestimmung die beiden ersten dieser Gleichungen, da

$$\varkappa_2 = \varkappa_3$$

wird.

II. Specialisirung.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, können bei den Versuchen nicht regelrechte Rotationsellipsoide verwendet werden, sondern nur deren Näherungsformen: dünne cylindrische Stäbchen oder dünne kreisförmige Scheiben. Die Constanten

A und B ergeben sich für die beiden speciellen Formen, nach Kirchhoff[1]), wie folgt:

Für eine Scheibe, wenn ihre halbe Rotationsaxe mit a, die andere Halbaxe mit b bezeichnet und

$$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} = \varepsilon$$

gesetzt wird:

$$\mathfrak{A} = 4\pi \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \{\varepsilon - \operatorname{arctg} \varepsilon\},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2\pi}{\varepsilon^3} \{(1 + \varepsilon^2) \operatorname{arctg} \varepsilon - \varepsilon\}.$$

Für ein Stäbchen, bei derselben Bezeichnung der Halbaxen, wenn

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \eta$$

gesetzt wird:

$$A = -4\pi \frac{1 - \eta^2}{\eta^3} \left\{\log \text{nat} \sqrt{\frac{1 - \eta}{1 + \eta}} + \eta\right\},$$

$$B = \frac{2\pi}{\eta^3} \left\{(1 - \eta^2) \log \text{nat} \sqrt{\frac{1 - \eta}{1 + \eta}} + \eta\right\}.$$

Bezüglich des Volumens der zu benützenden Stäbchen und Scheiben, welches demjenigen eines Ellipsoides mit denselben Axen immerhin nicht genau entspricht, hat Lombardi[1]) einen Reductionsfactor eingeführt. Er wurde ermittelt durch Messung der Volumina von Scheiben und Stäbchen sehr verschiedener Dicke, in Vergleich gebracht mit denjenigen entsprechender gleichaxiger Ellipsoide, welche gerechnet wurden. Es ergab sich, dass das direct gemessene Volumen der Stäbchen bez. Scheiben mit dem Factor 0,83 zu multipliciren sei, um eine möglichste Uebereinstimmung mit dem Volumen des entsprechenden Ellipsoides zu erreichen. Dieser Reductionsfactor ist auch in meinen Rechnungen in Anwendung gebracht, ändert aber die Endresultate nur unbedeutend.

---

[1]) Kirchhoff, Mechanik p. 131.

[2]) Lombardi, Memorie della Reale Accademia della Scienze di Torino. Serie II. Tom. XLV. p. 196. 1895.

Verwendbarkeit von Scheiben und Stäbchen.

Es erübrigt noch, einige Worte über die Verwendbarkeit der Scheiben und Stäbchen zu sagen. Im allgemeinen ist für die Versuche der Scheibenform der Vorzug zu geben. Erstens bietet sie dem Angriffe der Kraftlinien eine grössere Fläche als ein dünnes Stäbchen. Ferner ist die Herstellung einer dünnen Krystallscheibe weitaus nicht so schwierig wie die eines dünnen cylindrischen Stäbchens, und lassen sich durch jene die bezüglich der Ellipsoidähnlichkeit gestellten Bedingungen viel vollkommener erfüllen als bei einem Stäbchen. Ein Blick auf die Gegenüberstellung der in dieser Beziehung besten und schlechtesten Axenverhältnisse der von mir verwendeten Stäbchen und Scheiben genügt, um zu erkennen, dass das beste Axenverhältniss der Stäbchen noch weit zurücksteht hinter dem schlechtesten der Scheiben.

	Stäbchen a/b	Scheibe b/a
Bestes Axenverhältniss	$\frac{19,2}{2,032} = 9,449$	$\frac{15,6}{0,5} = 31,20$
Schlechtestes „	$\frac{15,3}{2,236} = 6,842$	$\frac{8,0}{0,340} = 23,53$

Schliesslich sind zur vollständigen Bestimmung eines zweiaxigen Krystalles drei Stäbchen erforderlich, derartig geschnitten, dass ihre Längsaxen den drei dielektrischen Hauptrichtungen entsprechen, während zum selben Zweck schon zwei Scheiben genügen, deren Rotationsaxen in zwei verschiedenen Hauptrichtungen liegen. — Für einen optisch einaxigen Krystall genügen zwei, den beiden Hauptrichtungen entsprechende Stäbchen, oder eine einzige Scheibe, wenn dieselbe parallel zur optischen Axe geschnitten ist.

Nach diesen Betrachtungen sollte man nun eigentlich ausschliesslich Scheiben zu den Untersuchungen verwenden. Bei der Bearbeitung von Krystallen aber ist es einem leider nicht immer freigestellt, in einer bestimmten Richtung nach Belieben eine Scheibe oder ein Stäbchen herauszuschneiden, da entweder die Form des Krystalles an und für sich, oder innere Einschlüsse und Sprünge, oder Zwillingslamellen für eine Richtung

nur eine bestimmte der beiden Formen möglich machen. Andererseits müssen die zu untersuchenden drei Stäbchen oder zwei Scheiben aus ein und demselben Krystall geschnitten sein, da verschiedene Krystalle, wenn sie auch vollständig rein und farblos sind, trotzdem merkliche, oft sehr bedeutende Verschiedenheiten in ihrem elektrischen Verhalten zeigen. Bezüglich der Verschiedenheit der Leitfähigkeit hat Curie[1]) sehr interessante Versuche gemacht, welche beweisen, dass Krystalle, deren sonstige physikalische Eigenschaften völlig gleich sind, in elektrischer Beziehung unleugbare Unterschiede aufweisen können. Curie machte darauf aufmerksam, dass diese Verschiedenheiten vielleicht Schlüsse ziehen liessen auf die äusseren Verhältnisse, unter denen die Krystalle entstanden. Doch sind dies geologische Betrachtungen, welche ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit liegen.

Bei meinen Versuchen wurden, nach Maassgabe des vorhandenen Materials, sowohl Stäbchen als Scheiben verwendet. Um noch eine kurze Uebersicht über deren Verwendbarkeit zu geben, folge hier die Reihe der möglichen, genügenden Zusammenstellungen, vom praktisch ungünstigsten zum günstigsten Fall fortschreitend.

Für optisch zweiaxige Krystalle:

1. Drei Stäbchen, deren Rotationsaxen parallel den drei dielektrischen Hauptrichtungen sind.
2. Zwei Stäbchen, nach zwei verschiedenen Hauptrichtungen geschnitten, und eine Scheibe, deren Ebene die dritte Hauptrichtung enthält oder, was dasselbe ist, deren Rotationsaxe mit derjenigen eines der beiden Stäbchen zusammenfällt.
3. Zwei Scheiben, deren Rotationsaxen in zwei verschiedenen dielektrischen Hauptrichtungen liegen.

Für optisch einaxige Krystalle:

1. Zwei Stäbchen, eines parallel, das andere senkrecht zur optischen Axe.
2. Ein Stäbchen und eine Scheibe, welche beide als Rotationsaxe die optische Axe haben.
3. Eine Scheibe, deren Ebene die optische Axe enthält.

[1]) Curie, Ann. de chim. et de phys. 6. Serie 18. p. 203. 1889.

Formeln für optisch zweiaxige Krystalle.

Hieran anknüpfend, möchte ich noch die vorher unter (I), (II), (III) entwickelten Formeln in einfacherer, übersichtlicher Form geben. — In den den Formeln zur Orientirung beigegebenen Figuren soll die horizontal gezeichnete Axe (x-Axe) jeweilig die Rotationsaxe des Stäbchens bez. der Scheibe, darstellen und die verticale (z-Axe) die in die Aufhängung fallende. Ferner lasse ich, wie es den später zu beschreibenden Versuchen entspricht, die Rotationsaxen der Scheiben, wenngleich horizontal, nicht nach derselben Richtung gehen wie diejenigen der Stäbchen. Die Buchstaben a, b, c bezeichnen die Hauptrichtungen der Dielektricität, welche bei dem rhombischen System mit den Elasticitätsaxen zusammenfallen, und zwar:

a die Mittellinie, welche den spitzen Axenwinkel halbirt,
b die Normale zur Ebene der optischen Axen (sogenannte optische Normale),
c die Mittellinie, welche den stumpfen Axenwinkel halbirt.

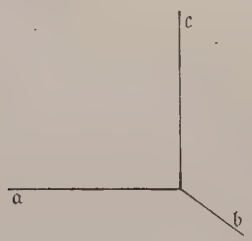
Ferner nennen wir die Dielektrisirungsconstante

in der Richtung a: $\varkappa_1$,
„ „ „ b: $\varkappa_2$,
„ „ „ c: $\varkappa_3$.

Betrachten wir zunächst drei Stäbchen, aus ein und demselben zweiaxigen Krystall geschnitten, welche, der Allgemeinheit halber, verschiedene Volumina V_1, V_2, V_3 und somit auch verschiedene Constante $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ haben sollen. Setzen wir zur Vereinfachung, auf die Formel (I) zurückgreifend, den Ausdruck

$$\frac{V P^2}{M p} = L,$$

so ergeben sich folgende, zur logarithmischen Rechnung fertigen Formeln:

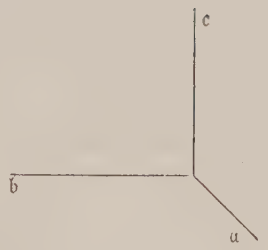


I. Stäbchen.

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 [2 A_1 - L_1] + 2}{\varkappa_1 [L_1 (B_1 - A_1) - 2 A_1 B_1] - 2 B_1 - L_1}.$$

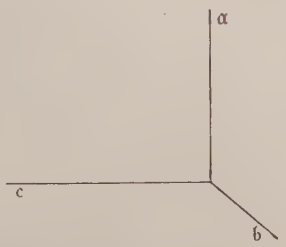
II. Stäbchen.

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 [2 B_2 + L_2] + 2}{\varkappa_1 [L_2 (B_2 - A_2) - 2 A_2 B_2] - 2 A_2 + L_2}.$$



III. Stäbchen.

$$\varkappa_3 = \frac{\varkappa_2 [2 B_3 + L_3] + 2}{\varkappa_2 [L_3 (B_3 - A_3) - 2 A_3 B_3] - 2 A_3 + L_3}.$$



Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich:

$$\varkappa_1 \text{ und } \varkappa_2,$$

aus der dritten: $\varkappa_3$.

Dass sich entsprechend die Formeln für alle möglichen Aufhängungen herstellen lassen, ist leicht ersichtlich; und durch zweckmässig abgeänderte Aufhängung der drei Stäbchen werden Controlmessungen ermöglicht.

Soll die Bestimmung mittels zweier Scheiben ausgeführt werden, was vorher als günstigster Fall bezeichnet wurde, so gestalten sich die umgewandelten Formeln folgendermaassen.

Zunächst sei wieder dieselbe Vereinfachung eingeführt. Da wir aber anfangs für den Fall, dass der Winkel φ um δ verkleinert wird, was bei Stäbchen der Fall ist, gesetzt haben:

$$\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p,$$

bei Scheiben aber der Winkel φ um δ vergrössert wird, so wollen wir, um bei Benutzung der Formeln von dem Vorzeichen des Winkels unabhängig zu sein, für Scheiben setzen:

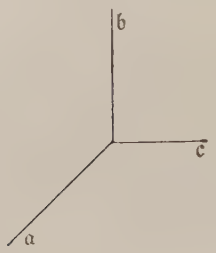
$$\frac{\delta}{\cos 2\delta} = -\mathfrak{p},$$

und somit:

$$-\frac{\mathfrak{B} P^2}{M \mathfrak{p}} = \mathfrak{L}.$$

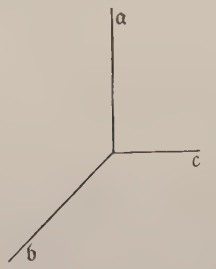
Für Scheiben seien, der Uebersicht halber, deutsche Buchstaben eingeführt; zugleich wird eine Doppelbezifferung nothwendig, wobei die römischen Ziffern sich allein auf eine bestimmte Scheibe, die arabischen, wie bisher, auf die Messung nach einer bestimmten Richtung beziehen sollen.

Scheibe I.



1. In erster Aufhängung.

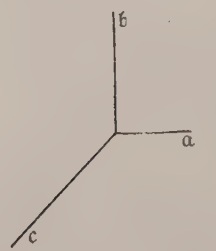
$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa_3 [2\mathfrak{A}_I + \mathfrak{L}_{II}] + 2}{\varkappa_3 [\mathfrak{L}_{I\,1} (\mathfrak{A}_I - \mathfrak{B}_I) - 2\mathfrak{A}_I \mathfrak{B}_I] - 2\mathfrak{B}_I + \mathfrak{L}_{I\,1}}.$$



2. In zweiter Aufhängung.

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_3 [2\mathfrak{A}_I + \mathfrak{L}_{I\,2}] + 2}{\varkappa_3 [\mathfrak{L}_{I2} (\mathfrak{A}_I - \mathfrak{B}_I) - 2\mathfrak{A}_I \mathfrak{B}_I] - 2\mathfrak{B}_I + \mathfrak{L}_{I2}}.$$

Scheibe II.



3.

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa_3 [2\mathfrak{B}_{II} - \mathfrak{L}_{II\,3}] + 2}{\varkappa_3 [\mathfrak{L}_{II\,3} (\mathfrak{A}_{II} - \mathfrak{B}_{II}) - 2\mathfrak{A}_{II} \mathfrak{B}_{II}] - 2\mathfrak{A}_{II} - \mathfrak{L}_{II\,3}}.$$

Aus 1. und 3. ergeben sich:

$$\varkappa_3 \text{ und } \varkappa_1,$$

aus 2.: $\varkappa_2$.

Mit der Scheibe II lässt sich, was als Controle stets zu empfehlen ist, ebenfalls $\varkappa_2$ bestimmen.

Werden, was früher als zweiter Fall angegeben wurde, zwei Stäbchen und eine Scheibe verwendet, so kommen die-

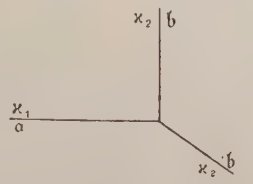
selben, den Stäbchen bez. der Scheibe entsprechenden Formeln in Anwendung; und auch hier gestattet die zweifache Aufhängung der Scheibe wieder eine Controlmessung.

Formeln für optisch einaxige Krystalle.

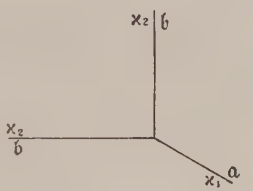
Für einen optisch einaxigen Krystall gestalten sich die Formeln für die drei verschiedenen Fälle folgendermaassen.

I. Fall: Zwei Stäbchen.

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 [2A_1 - L_1] + 2}{\varkappa_1 [L_1 (B_1 - A_1) - 2A_1 B_1] - 2B_1 - L_1}.$$

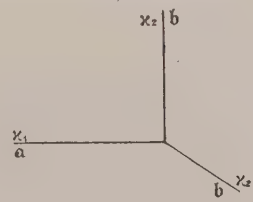


$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 [2B_2 + L_2] + 2}{\varkappa_1 [L_2 (B_2 - A_2) - 2A_2 B_2] - 2A_2 + L_2}.$$

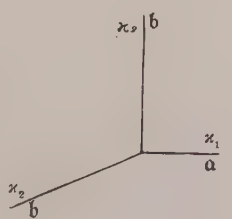


II. Fall: Ein Stäbchen und eine Scheibe, die beide als Rotationsaxe die optische Axe haben.

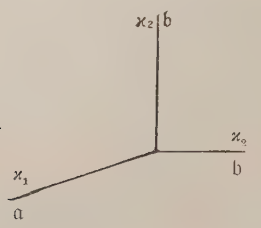
$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 [2A_1 - L_1] + 2}{\varkappa_1 [L_1 (B_1 - A_1) - 2A_1 B_1] - 2B_1 - L_1}.$$



$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 [2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{L}_2] + 2}{\varkappa_1 [\mathfrak{L}_2 (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2) - 2\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2] - 2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{L}_2}.$$

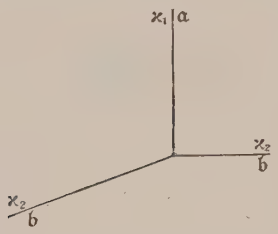


III. Fall: Eine Scheibe, parallel der optischen Axe.



In erster Aufhängung:

$$x_1 = \frac{x_2 [2\mathfrak{A} + \mathfrak{L}_1] + 2}{x_2 [\mathfrak{L}_1 (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - 2\mathfrak{B} + \mathfrak{L}_1}.$$



In zweiter Aufhängung:

wird $\mathfrak{L}_2 (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \omega$ gesetzt:

$$x_2 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{\omega} = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega}}.$$

In dieser Gleichung erscheint das x_1 gar nicht mehr, da es in die Richtung der Aufhängung fällt. Das heisst nichts anderes, als dass sich die Scheibe in dieser Aufhängung wie ein amorpher Körper verhält. Und wenn wir nun den letzten Ausdruck reconstruiren:

$$x_2^2 [\mathfrak{L}_2 (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - 2x_2 (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) - 2 = 0,$$
$$x_2^2 (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\mathfrak{L}_2 - 2 [x_2^2 . \mathfrak{A}\mathfrak{B} + x_2 (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + 1] = 0,$$
$$x_2^2 (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\mathfrak{L}_2 - 2 (1 + x_2 \mathfrak{A})(1 + x_2 \mathfrak{B}) = 0,$$

$$1 = \frac{x_2^2 (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\mathfrak{L}_2}{2 (1 + x_2 \mathfrak{A})(1 + x_2 \mathfrak{B})},$$

und setzen schliesslich wieder den Werth:

$$\mathfrak{L} = -\frac{\mathfrak{V} P^2}{M\mathfrak{p}} \text{ ein,}$$

so kommen wir zu der Gleichung:

$$M\mathfrak{p} = \frac{x_2^2 (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}{2 (1 + x_2 \mathfrak{A})(1 + x_2 \mathfrak{B})} \mathfrak{V} P^2.$$

Und dies ist der Ausdruck, den Graetz und Fomm, und später Lombardi, ihren Bestimmungen der Dielektricitätsconstante amorpher Körper zu Grunde gelegt haben. Er zeigt zugleich, dass der dritte Fall nicht nur, wie früher erwähnt, der prak-

tisch einfachste und am wenigsten kostspielige ist, sondern dass er auch eine weitaus kürzere Rechnung erfordert als die beiden anderen.

Wie die einzelnen Glieder der vorliegenden Gleichungen bestimmt wurden, mögen die folgenden Kapitel zeigen.

Versuchsanordnung.

Das elektrische Feld. Spannungsmessung.

Das homogene, elektrische Feld wurde zwischen den Platten eines Kohlrausch'schen Condensators hergestellt. Der Durchmesser der Platten betrug 14,6 cm; die eine derselben war feststehend, die andere liess sich parallel zur ersten, in horizontaler Richtung verschieben, wobei eine am Fussbrett angebrachte Noniustheilung die genaue Ablesung des jeweiligen Plattenabstandes, der bei meinen Messungen zwischen 10 und 35 mm variirte, ermöglichte. Die wechselnden Ladungen erhielten die Platten direct von den Wechselstromklemmen eines zu diesem Zweck montirten Elektromotors, welcher mit Gleichstrom von 106 Volt von der grossen Accumulatorenbatterie des Physik. Institutes gespeist wurde und eine Tourenzahl 56 pro Secunde ergab. Zur Spannungsmessung des Wechselstromes diente ein sorgfältig geaichtes Hitzdrahtvoltmeter von Hartmann und Braun, welches den Condensatorplatten parallel geschaltet war. Mittels eines Quecksilberumschalters konnten je nach Bedarf, die Condensatorplatten allein, das Hitzdrahtvoltmeter allein, oder beide Kreise zugleich eingeschaltet werden. — Im Gleichstromkreis lag noch ein Schuckert'sches Voltmeter, das nicht den Zweck der genauen Spannungsmessung hatte, sondern allein plötzliche Spannungsschwankungen anzeigen sollte.

Befestigung der Krystallschnitte.

Zwischen den Condensatorplatten wurde das zu untersuchende Krystallstäbchen, bez. die Scheibe, möglichst genau im Mittelpunkte des Feldes aufgehängt, sodass man mit grosser Sicherheit ausschliesslich unter der Wirkung paralleler Kraft-

linien arbeitete. Der Krystall war mit einem kleinen Silberspiegel fest verbunden, und zwar durch einen dünnen Glasstab, welcher mittels eines stumpf aufgekitteten Aluminiumhakens in denjenigen des Aufhängefadens eingehängt war. Bevor ich auf letzteren näher eingehe, möchte ich noch einige Worte über die Befestigung von Spiegel und Krystall sagen.

Da zu Anfang jeder Messung der Spiegel parallel den Condensatorplatten und der Krystall unter 45° geneigt zu diesen stehen musste, war es nothwendig, von vornherein Spiegel und Krystall genau um 45° gegeneinander gedreht an dem Glasstab zu befestigen. Hierzu diente eine eigene, kleine Vorrichtung, welche Fig. 1 veranschaulicht.

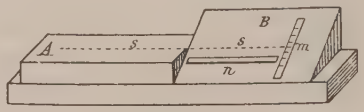


Fig. 1.

Auf einer Leiste aus weichem Holz sind zwei Stücke harten Holzes aufgeleimt, deren ebene Flächen *A* und *B* genau unter 45° gegeneinander gedreht stehen. Die geneigte Fläche *B* trägt eine horizontal laufende Leiste, ca. 2 mm dick, und einen zu dieser senkrechten, gleich dicken Millimetermaassstab. Letzterer, in der Figur mit *m* bezeichnet, hat seinen Nullpunkt da, wo er von der gedachten Schnittlinie *s* der beiden Ebenen *A* und *B* getroffen wird. Die Schnittlinie ist auf beiden Flächen mit Tusche markirt und hat den Zweck, dem Glasstabe, der auf der horizontalen Fläche *A* aufgelegt wird, als Richtlinie zu dienen. An dem Glasstabe wird, gegen sein eines Ende zu, mittels Klebwachs der Spiegel aufgeklebt, und dieser mit der Spiegelfläche auf die Ebene *A* gelegt. Auf der Ebene *B* kommt in den Winkel zwischen *m* und *n* der zu untersuchende Krystallschnitt zu liegen, derart, dass die zu untersuchende Richtung senkrecht zu dem aufgelegten Glasstabe liegt. Dadurch, dass die mit Klebwachs befestigte Leiste *n*, ganz wenig erwärmt, nach auf- und abwärts verschiebbar ist, kann das Krystallstäbchen bez. die Scheibe immer so aufgelegt werden, dass die Projection seines Mittelpunktes in die markirte Schnittlinie *s* fällt. Auf dem vorher sorgfältig mit Alkohol ge-

reinigten Krystall wird vor Auflegen desselben ein kleines Tröpfchen Klebwachs angebracht; ebenso am Ende des Glasstabes, welches sodann mit einem heissen Eisen von unten erwärmt und gegen den Krystall fest angedrückt wird. Diese Befestigung ist eine äusserst solide und reine, und derjenigen mit Schellack und Siegellack vorzuziehen. Anfangs verwendete ich auch Schellack, da ich fürchtete, dass bei dem unerlässlichen Entelektrisiren des Krystalles in der Flamme das Wachs nachgeben könne. Dies ist aber nicht der Fall, wenn das Durchziehen der Flamme nur rasch genug geschieht. Ein Hauptnachtheil des Schellacks oder Siegellacks zur Befestigung von polirten Krystallen ist, dass fast immer der Krystall selbst ein wenig erhitzt werden muss, um ein genügendes Zusammenhalten zu erzielen, wobei leicht spaltbare Krystalle ausserordentlich leicht springen. — Doch kann man die Befestigung ohne Erhitzen des Krystalles auch erreichen, indem man die Befestigungsstelle zuerst mit einem Aetherlack, etwa in Aether gelöstem Siegellack, bestreicht und, nach dem schnell eintretenden Trocknen, den flüssigen Schellacktropfen aufsetzt. Doch ist, wie gesagt, die Befestigung mittels Klebwachs viel einfacher und durchaus genügend.

Aufhängefaden. Cocon, Metall, Quarz.

Von grösster Wichtigkeit ist es, dass der Glasstab sammt Spiegel und Krystall, wenn er aufgehängt ist, wirklich vertical hänge. Und dies muss nach Befestigung eines neuen Krystallschnittes regelmässig von neuem untersucht werden. Am schnellsten geschieht das, indem man in einem weiten Glasrohr die Aufhängung und einen langen, beschwerten Coconfaden nebeneinander hängt, und letzteren mit freiem Auge gegen den in leichte Drehung versetzten Glasstab visirt, wobei dieser dem Coconfaden parallel bleiben muss.

Als Aufhängefaden wurde ein 20 mm langer, feiner Coconfaden verwendet; und zwar sind sämmtliche, in Folgendem beschriebenen, endgültigen Krystallmessungen mit ein und demselben Faden durchgeführt.

Es mag im ersten Augenblicke merkwürdig erscheinen, dass ein so kurzer Faden angewandt wurde; doch da es rathsam

ist, den Krystall bei einer Messung möglichst kurz der wechselnden Kraft auszusetzen, thut man gut, mit möglichst kurzer Schwingungszeit zu arbeiten, welche bei dem 20 mm langen Faden immerhin noch, bei den verschiedenen angehängten Krystallen 20,6 bis 25,8 Secunden und für ein Wismuthstäbchen 38,6 Secunden betrug. Die Ausschläge bei dem constanten Scalenabstand von 3 Metern und der verhältnissmässig minderen Wechselstromspannung von circa 80 Volt waren vollkommen genügend. Und schliesslich hat ein kurzer Aufhängefaden noch den unverkennbaren Vortheil der grösseren Stabilität des Systems.

Einen Nachtheil haben die Coconfäden, sie sind stark hygroskopisch. Der Hygroskopie tritt man am besten entgegen durch sorgfältiges Auskochen des Coconfadens vor der Befestigung und Waschen in reinem Aether nach derselben. Ich machte auch den Versuch, den Faden durch einen feinen Fettüberzug gegen Feuchtigkeit zu schützen; hierzu wurde eine sehr dünne Lösung von reinem Mandelöl in Aether verwendet. Doch kam ich wieder von diesem Verfahren ab, da sich durch den Fettgehalt und die dadurch bedingte, leichtere Staubaufnahme die Torsion des Fadens doch mit der Zeit ändern kann.

Um der Hygroskopie auszuweichen, benutzte ich auch längere Zeit Metallfäden, welche, um sie vollkommen zu spannen, im elektrischen Strom ausgeglüht wurden. So wurden mit Silber- und Platinfaden und feinem Kupferband Messungen gemacht. Hier erwies sich wieder die erforderliche Länge, die bis zu 560 mm ausgedehnt wurde, als unvortheilhaft.

Befestigung von Quarzfäden.

Sowohl die schädliche Länge als auch die Hygroskopie können vermieden werden durch Anwendung von Quarzfäden. Diese besitzen zwar keine so hohe Torsionsempfindlichkeit wie Coconfäden, tragen aber, bei gleicher Dicke, 3—5 mal soviel als diese und können ausserordentlich viel dünner hergestellt werden, als es durch Theilung bei Cocon möglich ist. Ferner haben sie sehr geringe elastische Nachwirkung und sind, wie gesagt, nicht hygroskopisch. Mit diesen Eigenschaften präsen-

tiren sich die Quarzfäden für unsere Messungen unstreitig als das in jeder Richtung vollkommenste Aufhängematerial. Warum bei meinen endgültigen Messungen trotzdem Coconfaden benutzt wurde, erscheint als eine berechtigte Frage.

Ich arbeitete einige Monate lang ausschliesslich mit Quarzfäden. Die, welche mir zur Verfügung standen, waren von ausserordentlicher Feinheit, sodass sie mit freiem Auge nur in gutem, auffallendem Licht, und gegen einen dunklen Hintergrund oder Spiegel gehalten, wahrgenommen werden konnten. Ihre Befestigung bietet, wenn sie exact ausgeführt werden soll, Schwierigkeiten und kann sehr zeitraubend werden. Dies mag auch der Grund sein, dass dieses vorzügliche Aufhängematerial so verhältnissmässig wenig im Gebrauch ist. Und da man, wenn man einmal in einem Messinstrument einem Quarzfaden begegnet, seiner Befestigung häufig ansieht, dass der, der dieselbe hergestellt hat, froh war, den Faden überhaupt irgendwie zum halten zu bringen, aber gerade bei Quarzfäden wichtig ist, dass dieselben vollständig gerade, auch an der Befestigungsstelle ohne Bug angebracht seien, möchte ich versuchen, ein einfaches Verfahren anzugeben, welches eine schnelle und einwandsfreie Befestigung, ohne Gefährdung des Fadens durch zu grosse Erhitzung, ermöglicht.

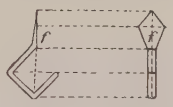


Fig. 2.

Für den Haken zur Aufnahme des schwingenden Systems empfiehlt sich die in Fig. 2 dargestellte Form.

Der Haken wird am einfachsten aus Aluminiumdraht hergestellt und wird zunächst auf der Fläche *f* mit einem Siegellackbelag versehen. Sodann wird er derart eingeklemmt, dass die Fläche *f* von unten frei und ungefähr horizontal steht. In der Klemmvorrichtung kommt er auf einen Spiegel zu liegen, der an die Schachtel, in der die Quarzfäden ausgespannt sind, anstossen, und ganz wenig unter deren oberem Rande liegen soll. Mit einer Elfenbeinpincette löst man den Quarzfaden an einem Ende ab und zieht dieses über die Mittellinie der kleinen Fläche *f*, welche sodann von unten mit einem heissen Eisen erhitzt wird, bis der Siegellack den Faden umschliesst. Tritt dies nicht vollkommen ein, so wird noch ein kleiner Tropfen Siegellack von oben aufgesetzt und, durch Erhitzen von unten

und oben, zum Bedecken der Fläche gebracht. Es empfiehlt sich, neben dem horizontal liegenden Spiegel noch einen zweiten anzubringen, derart gestellt, dass man in ihm den Quarzfaden von der Seite sieht; auf diese Weise hat man immer drei Möglichkeiten, ihn zu sehen, und seine Lage zu erkennen.

Zur oberen Befestigung des Quarzfadens verfertigte ich die in Fig. 3 dargestellte Vorrichtung, durch welche eine nochmalige Erhitzung des Fadens vermieden wird, und welche zugleich eine Verlängerung oder Verkürzung des tordirenden Theiles des einmal eingezogenen Fadens gestattet.

Fig. 3.

Sie besteht aus einer alten Reissfeder, auf deren Spitzen zunächst zwei Stückchen Hartgummi befestigt sind, derart, dass sie sich beim Zusammenpressen der Feder nur mit der untersten, gut gefeilten Kante berühren. Ueber jedes dieser beiden Enden ist ein Stückchen feiner Gummischlauch gezogen, der die scharfen Kanten bedeckt und verhindert, dass der spröde Quarzfaden zwischen diesen zerdrückt werde. Zum Einziehen des Fadens wird das so montirte Instrument, nach oben aufgeklappt, in zwei ausgeschnittene Korke gelegt und, wieder über dem Spiegel, der Quarzfaden mit seinem noch freien Ende an einen Wachstropfen angedrückt, der ein gutes Stück hinter den Kautschukenden aufgesetzt wurde. Darnach kann man mit grosser Ruhe und Genauigkeit den Faden über die kleine Kautschukfläche legen und ihm, ohne die provisorische Wachsbefestigung zu lösen, die gewünschte, wirksame Länge geben (bei meinen Versuchen 15—20 mm). Dann wird der aufgeklappte Schenkel vorsichtig herabgedrückt und mit der Schraube festgezogen.

Diese Aufhängung zwischen zwei elastischen Flächen ist theorethisch nicht einwandsfrei; doch ergab sie während mehrwöchentlicher Verwendung so gute und regelmässige Resultate, dass sie als vortheilhafte Befestigung für Quarzfäden beibehalten wurde.

Ein Nachtheil der Quarzfäden ist ihre Sprödigkeit, die sie, in Verbindung mit der ausserordentlichen Feinheit, in der sie hergestellt werden, sehr empfindlich macht. Ihre Verwendung in Instrumenten, wo das schwingende System mehr-

mals am Tage ein- und ausgehängt werden muss, erscheint daher unrathsam, da die allergeringste Unruhe, wie Zittern der Hand, schon das Reissen des Fadens herbeiführen kann. Und das ist der Grund, der mich bewog, für die endgültigen Messungen wieder zum gewöhnlichen Coconfaden zurückzugreifen.

Schutzvorrichtungen. Schaltung.

Um die Feuchtigkeit im Innern des Glaskastens, der den ganzen Condensator einschloss, unschädlich zu machen, wurde eine Schale mit concentrirter Schwefelsäure in denselben gestellt. Zum Schutze gegen äussere Temperatur- sowie elektrostatische Einflüsse umgab den ganzen Glaskasten sammt dem Rohr der Aufhängevorrichtung noch ein mit Stanniol überzogener Cartonkasten, der zur Erde abgeleitet war. An ihm waren zwei Fenster ausgeschnitten: das eine zur Spiegelablesung gegen das Fernrohr gerichtet, das andere, in einer Thüre der Vorderwand, zur Temperaturablesung an einem Thermometer, das im Innern des Glaskastens hing.

Die Schaltung der ganzen Versuchsanordnung sei durch Fig. 4 veranschaulicht.

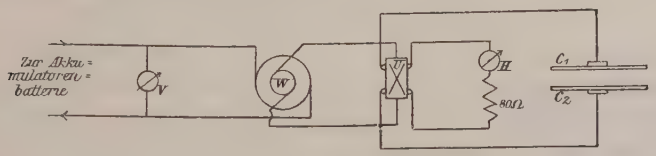


Fig. 4.

V Gleichstrom-Voltmeter. *W* Wechselstromtransformator. *U* Umschalter. *H* Hitzdraht-Voltmeter mit 80 Ω Vorschaltwiderstand C_1, C_2 Condensatorplatten.

Die Messungen.

Vorbereitende Messungen.

Den eigentlichen Messungen muss ich die vorbereitenden vorausgehen lassen; sie erstrecken sich auf die optische Untersuchung sowie Ausmessung der Krystallschnitte, auf die Bestimmung des Torsionsmomentes des Aufhängefadens und auf

die Bestimmung des Reductionsfactors für das mit einem Vorschaltwiderstand versehene Hitzdrahtvoltmeter.

Sämmtliche in dieser Arbeit verwendeten Krystallschnitte sind, genau nach Angabe, bei den Herren Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe hergestellt worden. Die nachträgliche Bestimmung der Axenrichtungen geschah mittels des Nörrenberg'schen Polarisationsmikroskopes, je nach Bedarf im monochromatischen oder gewöhnlichen convergenten Licht. Die gefundenen Richtungen wurden mit Tusche an der Stirnfläche der Stäbchen bez. am Rande der Scheiben möglichst genau markirt. — Die Ausmessung der Schnitte wurde auf der Theilmaschine und auf dem Messtisch des Mikroskopes vorgenommen. War ein Stäbchen unvollkommen cylindrisch geschliffen, so wurde nach verschiedenen Diameterrichtungen gemessen und der Mittelwerth aus den Messungen genommen.

Für das Torsionsmoment des Coconfadens, welches aus Trägheitsmoment und Schwingungszeit ursprünglich für jeden neu eingehängten Körper einzeln bestimmt wurde, ergab sich der Werth:

$$M = 0{,}0048896.$$

Da das für Wechselstrom verwendbare Hitzdrahtvoltmeter, das mir vom Physikal. Institut gütig zur Verfügung gestellt war, nur für Spannungen bis 70 Volt construirt war, meine Wechselstromspannung aber diesen Werth fast immer weit überschritt, musste ein Vorschaltwiderstand vorgelegt werden, und zwar wurde ein Edelmann'scher Stöpselrheostat, mit 80 Ω, verwendet. Der hierdurch nöthig gewordene Reductionsfactor für die direct abgelesenen Ausschläge des Voltmeters wurde zunächst in der Wheatstone'schen Brücke, durch Ermittelung des inneren Widerstandes des Voltmeters, ermittelt und ferner durch Aichung mit dem neuen Universalgalvanometer von Siemens & Halske. Als Reductionsfactor ergab sich übereinstimmend der Werth 1,23, mit welchem die direct abgelesene Spannung zu multipliciren ist.

Eine Messung setzte sich aus drei zusammenhängenden Ausschlagsmessungen, die Gänge genannt werden sollen, zusammen, deren jede aus einer Nullpunkt- und direct folgender Ausschlagsablesung bestand. Nullpunkt sowie Ausschlag wurden aus zwei oder drei Umkehrpunkten, mit möglichst weiten

Schwingungen, bestimmt. Mit einer einzigen Messung wurde, wenn auch die einzelnen Gänge gute Uebereinstimmung zeigten, niemals eine Krystallrichtung absolvirt. Das Minimum umfasste 3 solcher Messungen zu verschiedenen Tageszeiten, also 9 directe Ausschläge, das Maximum 13 Messungen, also 39 directe Ausschläge. Weshalb so verschiedene und hohe Zahlen von Messungen nöthig wurden, soll bei Besprechung der einzelnen Krystalle erörtert werden.

Die Krystalle wurden gewöhnlich schon am Abend vor der Messung eingehängt und sorgfältig durch die Gasflamme entelektrisirt, wobei die Condensatorplatten zur Erde abgeleitet waren. Letzteres geschah auch vor und nach jedem Messgange. Ferner wurden die Platten stets zusammen und erst dann eingeschaltet, wenn der Motor in vollem Gange war.

Die Ergebnisse der Messungen mögen in Folgendem für jeden Krystall und jede Hauptrichtung desselben einzeln besprochen werden. Doch möchte ich noch die Resultate einiger Controlmessungen, welche zur Prüfung der Methode angestellt wurden, vorausgehen lassen.

Controlmessungen.

Schwefel.

Verwendet wurde ein frisch gegossenes cylindrisches Stäbchen von 17 mm Länge und 2,9 mm Dicke. Die in die Rechnung einzuführenden Grössen ergeben sich wie folgt. Es sollen dabei nochmals die früher eingeführten Bezeichnungen zur Erläuterung beigefügt werden:

Rotationsaxe	$2a = 17$ mm
Durchmesser	$2b = 2{,}9$ mm
Auf Ellipsoid corrig. Volumen	$0{,}83\ V = 93{,}197$ mm^3
Axenverhältnissconstante . .	$A = 0{,}56171$
„ „ . .	$B = 6{,}0127$
Wechselstromspannung . . .	$E = 75{,}5$ Volt
Condensatorplattendistanz . .	$d = 20$ mm
Torsionsmoment	$M = 0{,}003\,680$
Scalenausschlag	$s = 104$ mm
Ausschlagswinkel	$\delta = 0^0\ 59'\ 34''$

$$\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p = 0{,}010\,895.$$

Hieraus ergiebt sich:

Die Dielektrisirungsconstante . . . $\varkappa = 0{,}24261$
Die Dielektricitätsconstante $1 + 4\pi\varkappa = D = 4{,}0487.$

Dieser Werth stimmt mit den von anderen Beobachtern gefundenen Werthen gut überein. Es fanden:

Curie	$D = 4{,}0$
Boltzmann	$D = 3{,}84—4{,}184$
Graetz und Fomm	$D = 4{,}131$
Lombardi	$D = 4{,}11—4{,}16$

Für alten Schwefel, welcher einige Monate vor der Messung gegossen und in Verwendung war, fand ich den Werth:

$\varkappa = 0{,}20685 \qquad D = 3{,}5999$

Beim Herausnehmen aus dem Messkasten zerfiel das Schwefelstäbchen, ein Zeichen, dass seine Struktur schon eine sehr lockere geworden war. — Graetz und Fomm fanden für alten Schwefel:

$\varkappa = 0{,}22266 \qquad D = 3{,}798$

Paraffin.

Es wurde ein frisch gegossenes Stäbchen verwendet; die erforderlichen Grössen ergaben sich folgendermaassen:

$2a = 23{,}5$ mm
$2b = 2{,}96$ mm
$0{,}83\ V = 134{,}32$ mm^3
$M = 0{,}00350$
$A = 0{,}361854 \qquad E = 73{,}75$
$B = 6{,}1038 \qquad d = 30$ mm
$s = 24$ mm
$\delta = 0^0\ 13'\ 30''$
$\log p = 0{,}59440 - 3$
$\varkappa = 0{,}11598 \qquad D = 2{,}4574$

Andere Beobachter fanden folgende Werthe:

Boltzmann	$D = 2{,}32$
Graetz und Fomm	$D = 2{,}20$
Lombardi	$D = 2{,}44—2{,}46$

Auch hier zeigt sich eine gute Uebereinstimmung.

Einaxige Krystalle.

Quarz.

Krystallklasse: Trigonal trapezoëdr. [ält. Bezeichn.: Hexagonal trapezoëdr.].
Doppelbrechung: positiv.

Der Quarz bietet in seinen elektrischen Erscheinungen viel Interessantes und Merkwürdiges. In seiner Eigenschaft als Dielektricum ist er im Stande, den Beobachter leicht irre zu führen; daher erfordert es eine lange Reihe sorgfältiger Beobachtungen und ausgedehntere Vorsichtsmaassregeln als bei anderen Krystallen, um den wahren Werth seiner Dielektricitätsconstante zu ermitteln.

Meine Messungen wurden mit zwei sehr vollkommen gearbeiteten cylindrischen Stäbchen durchgeführt, deren eines parallel zur optischen Axe, das andere senkrecht dazu geschnitten war.

Zuerst soll, wie es der thatsächlichen Versuchsfolge entspricht, das senkrecht zur optischen Axe geschliffene Stäbchen besprochen werden. Und zwar möchte ich zunächst einige Reihen von Messungen vorführen, welche mit den Endresultaten nichts zu thun haben. In den Messungstabellen soll in der ersten Rubrik, mit C° bezeichnet, die Temperatur im Innern des Messkastens angegeben werden, in der zweiten die corrigirte Wechselstromspannung E und in der dritten der Scalenausschlag s in mm.

I. Messung am 12. VIII. 98, Vorm.

Vor der Messung Entelektrisirung mit der Flamme.

C°	E Volt	s mm
21,58	72	200
—	72	199
21.6	72	202
		Mittel 200,5 ≐ 200

Nach Messung I. Flammenentelektrisirung.

II. Messung am 12. VIII. 98, Nachm.

C°	*E* Volt	*s* mm
22,44	69,5	110
—	69,5	105
22,68	69,5	107
		Mittel = 107

III. Direct anschliessende Messung mit vorherigem Flammendurchschlag.

C°	*E* Volt	*s* mm
23,05	69,5	205
—	—	177
23,05	69	151

Zunächst ist hier der enorme Unterschied auffallend, der sich zwischen den Ausschlägen der Messungen I. und II. zeigt; beide sind unter fast denselben Umständen, bei ungefähr gleicher Temperatur und Spannung, vor sich gegangen, und doch sind die Ausschläge bei I. nahezu doppelt so gross wie die bei Messung II. Dabei sind die Ausschläge in beiden Fällen annehmbar constant; im ersten Falle macht die grösste Abweichung vom Mittelwerth gerade 1 Proc. aus, im zweiten Falle nicht ganz 3 Proc. — Das Resultat jeder Messung für sich könnte demnach als berechtigt und brauchbar angesehen werden. — Betrachten wir nun aber Messung III., welche direct an II. anschliessend, mit vorherigem Flammendurchschlag, ausgeführt wurde, so sehen wir Ausschläge, die untereinander eine ausserordentliche Verschiedenheit aufweisen. Beim ersten Gang ist der Ausschlag plötzlich wieder aufs doppelte gestiegen, beim zweiten und dritten Gang sinkt er wieder. — Offenbar ist es der Einfluss der Temperaturerhöhung durch die Flamme, der dieses plötzliche Steigen des Ausschlages hervorgerufen hat. Nach dieser Annahme mussten nun die Ausschläge der Messungen I. und III. untereinander Uebereinstimmung zeigen, da sie beide direct nach einem Flammendurchschlag ausgeführt wurden. Doch zeigt sich die Ueber-

einstimmung allein zwischen dem ersten Ausschlag von III. und denjenigen der Messung I. Nun ist es aber offenbar nicht die Temperaturerhöhung direct, welche das Steigen des Ausschlages bedingt, sondern die durch sie im Quarze geweckte Pyroelektricität. Und ebenso wie diese nicht von der Temperatur selbst, sondern allein von deren Aenderung abhängt, so müsste die Grösse des Ausschlages als Maass für die Temperaturänderung betrachtet werden, und zwar in diesem Falle für ein Sinken der Temperatur, da der Krystall während der Messung die durch die Flamme empfangene Wärme wieder abgiebt. Und die Constanz des hohen Ausschlages würde nur anzeigen, dass eine constante, stetige Temperaturänderung während der Messung vorhanden war.

Dass dies bei Messung I. der Fall war, bei Messung III. aber nicht, kann seinen Grund in verschiedenen äusseren Umständen haben. Die Verschiedenheit der Durchflammung, durch die der Krystall von vornherein auf sehr verschiedene Temperaturstufen gebracht werden kann, die verschieden temperirten Luftströmungen in der Umgebung des Krystalles, die Zeit, welche das schwingende System zum Ausschwingen, von der Durchflammung bis zum Beginn der Messung, brauchte, alles das kann hierbei mitgewirkt haben. — Der weitaus häufigere Fall ist, dass eine solche gleich nach der Durchflammung ausgeführte Messung in der Art von Messung III. verläuft, wie es sich auch in den noch weiter angeführten Messreihen IV., V. und VI. zeigt.

IV. Messung am 15. VIII. 98, Vorm.

C°	*E* Volt	*s* mm
23,45	68,5	381
—	—	332
23,6	68,5	291

V. Messung am 20. VIII. 98., Vorm.

C°	*E* Volt	*s* mm
25,8	60,8	332,5
—	60,8	270
25,8	60,8	221

VI. Messung am 20. VIII. 98, Vorm.

C°	*E* Volt	*s* mm
26,4	60,6	436,6
—	—	356,5
26,5	60,8	335,6

Aus den bisher besprochenen Messungen ergiebt sich, dass bei dem senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Quarz auf jeden Fall das Durchflammen direct vor der Messung zu vermeiden ist, da es gewissermaassen gerade das Gegentheil von dem bewirkt, was es bewirken soll, nämlich dem Krystall, kraft der Pyroelektricität, statische Ladungen ertheilt, während er durch die Flamme von etwa durch Reibung oder Induction veranlassten Ladungen befreit werden sollte. Ein später mit Turmalin angestellter Versuch erwies, dass das Durchflammen nach je drei Messungen überhaupt überflüssig ist, sowie nur vor und nach jeder einzelnen Messung die Condensatorplatten zur Erde abgeleitet werden. Diese Vorsicht wurde denn auch bei sämmtlichen folgenden Messungen eingehalten, nur erscheint, speciell für Quarz, noch die Frage: wann ist die Nachwirkung der Durchflammung wieder verschwunden.

Nach den bisher angeführten Messungen könnte man vermuthen, dass Messung II., welche ca. 4—5 Stunden nach einer Durchflammung angestellt wurde und die niedrigsten und annehmbar constante Ausschläge ergab, frei von dieser Nachwirkung sei. Doch zeigte es sich, dass nach ca. 12stündigem Warten noch bedeutend kleinere Ausschläge auftraten; diese waren denn auch nach 20stündigem Warten noch gleich und constant.

Nach dieser Erfahrung wurden nun die Messungen derart angeordnet, dass das Stäbchen Nachmittags eingehängt und durch die Flamme entelektrisirt wurde und erst am nächsten Morgen, bei vollständig constanter Temperatur, die Messung vor sich ging.

Es wurde auch versucht, die Flammenentelektrisirung ganz zu eliminiren und durch ein Ueberstreichen mit einem, aus feinstem Kupferband hergestellten Pinsel, der zur Erde abgeleitet war, zu ersetzen. Doch ergab sich diese Art als unzweckmässig, da erstens die Berührung durch den Pinsel nie mit Sicherheit auf alle Punkte der Oberfläche ausgedehnt werden kann und andererseits durch die hervorgebrachte Reibung wieder statische Ladungen eintreten könnten. So wurde die Flamme trotz ihrer temporären Inconvenienzen beibehalten.

Nun mögen die endgültigen Messungen mit dem senkrecht

zur optischen Axe geschnittenen Quarzstäbchen angeführt werden.

Das Stäbchen wurde am 10. XI. 98, Nachm., eingehängt und durch die Flamme entelektrisirt.

Plattendistanz 30 mm.

VII. Messung am 11. XI. 98, Vorm.

C°	*E* Volt	*s* mm
15	68,5	51
—	—	51,75
15	68,5	51,25
		Mittel 51,33

VIII. Messung am 12. XI. 98, Vorm.

C°	*E* Volt	*s* mm
15 —	75,4	58
—	—	56,5
15 —	75,4	56,5
		Mittel 57

IX. Messung am 12. XI. 98, Vorm.

C°	*E* Volt	*s* mm
15 —	74	56
—	—	55
15 —	74	54
		Mittel 55

Die Ausschläge einer jeden dieser Messungen zeigen genügende Constanz und die Messungen untereinander annähernde Uebereinstimmung in der Weise, dass die Ausschläge jeweilen den Quadraten der angewandten Spannungen proportional sind, eine Proportionalität, welche zuerst von Graetz und Fomm, später von Lombardi[1]) nachgewiesen wurde.

Uebersehen wir nun noch einmal die verschiedenen hier angeführten Messungen. Zweck der Messungen I. und II. war es, zu zeigen, dass auch Messungen, während welcher entschiedene Veränderungen in dem Krystalle vorgehen, constante Ausschläge geben können; dass also bei Quarz die Constanz allein durchaus kein Kriterium für die Verwendbarkeit der Messung ist. Die Messungen III.—VI. zeigen die Wirkung

[1]) Lombardi, Memorie della Reale Academia delle Scienze di Torino. Serie II. Tom. XLV. p. 171. 1895.

des Temperaturfalles und seiner Aenderung, und VII.—IX. endlich die von Temperatureinflüssen frei gemachten Ausschläge, die zur Berechnung der Dielektricitätsconstante verwendet werden können.

Genaue Untersuchungen über das Verhalten der Quarzkrystalle im elektrischen Felde, bei sich ändernder Temperatur, konnte ich leider nicht mehr ausführen. Es fiele dies über die Grenze der vorliegenden Arbeit hinaus und würde wieder eine vollständig neue Versuchsanordnung, neue Apparate und Schutzvorrichtungen erfordern. Derartige Versuche könnten übrigens, auf verschiedene Krystalle ausgedehnt, genügenden Stoff zu einer eigenen Arbeit geben.

Quarz ∥ zur optischen Axe.

Auch bei dem parallel zur optischen Axe geschnittenen Quarzstäbchen liess sich der Einfluss der durch die Durchflammung hervorgerufenen Temperaturänderung nachweisen, doch in weitaus geringerem Grade als bei dem Quarz senkrecht zur Axe. Auch trat die Erscheinung durchaus nicht regelmässig ein; es kam häufig vor, dass direct nach einer Durchflammung vorgenommene Messungen wohl grosse Unregelmässigkeiten der Ausschläge, nicht aber deutliche Erhöhung derselben zeigten.

Nach dem Sénarmont'schen Versuch, welcher eine Polarität nur in der zur optischen Axe senkrechten Ebene nachweist, und zwar derart, dass bei Temperaturänderung entgegengesetzte Pole an den einander gegenüber liegenden Ecken des sechseckigen Schnittes auftreten, sollte man in der Richtung der optischen Axe gar keine Polarität erwarten. Auch ich möchte nicht das Vorhandensein einer solchen behaupten, denn der Querschnitt des parallel zur optischen Axe geschnittenen Stäbchens enthält immerhin die sämmtlichen sechs Pole, wenn auch einander sehr nahe gerückt, und kann somit wohl Vergrösserungen des Ausschlages hervorrufen.

Bei diesem Stäbchen wurden demnach für die endgültigen Messungen dieselben Vorsichtsmaassregeln eingehalten wie bei dem senkrecht zur Axe geschnittenen.

Das Stäbchen wurde am 12. XI. 98, Nachm., eingehängt und durch die Flamme entelektrisirt.

Plattendistanz 30 mm.

Messungen am 13. XI. 98, früh 6 Uhr 30 Min.

C°	E Volt	s mm
13,4	72,6	55
—	—	54
13,4	72,5	54,5
		Mittel 54,5

C°	E Volt	s mm
13,4	86,5	65,25
—	—	65,5
13,4	86,5	65,5
		Mittel 65,42

Messungen am 14. XI. 98., Nachm. 2 Uhr 30 Min.

C°	E Volt	s mm
15,8	80	60,25
—	—	60
15,8	80	60
15,8	80	60,75
—	—	58,75
15,8	80	60,25
		Mittel 60

Auch hier sind die Ausschläge schön constant und zeigen Uebereinstimmung bezüglich der Proportionalität mit den Quadraten der Spannungen.

Fassen wir nun die Resultate, welche die Messungen mit beiden Quarzstäbchen geliefert haben, zusammen:

Quarz ∥.

$2a = 19{,}8$ mm

$2b = 2{,}516$ mm

$(0{,}83\ V) = 81{,}7055$ mm³

$A = 0{,}3659$ (const.) $M = 0{,}0048896$

$B = 6{,}1003$ $E = 79{,}75$ Volt

$\eta = 0{,}9919$ $d = 30$ mm

$s = 60$ mm

$\delta = 0^0\ 34'\ 23''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}00009 - 2$$

$$\varkappa_1 = \frac{25{,}2306\,\varkappa_2 + 2}{70{,}444\,\varkappa_2 + 12{,}2982}.$$

Quarz ⊥.

$2a = 19{,}8$ mm

$2b = 2{,}388$ mm

$(0{,}83\ V) = 73{,}6025$ mm^3

$A = 0{,}338\,43$ $\quad$ $M = 0{,}004\,889\,6$

$B = 6{,}114$ $\quad$ $E = 72{,}57$ Volt

$\eta = 0{,}992\,7$ $\quad$ $d = 30$ mm

$s = 54{,}4$ mm

$\delta = 0^0\ 31'\ 23''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}957\,68_5 - 3$$

$$\varkappa_1 = \frac{-\ 10{,}111\,64\,\varkappa_2 + 2}{58{,}172\,\varkappa_2 - 23{,}0165}$$

$\varkappa_1 = 0{,}322\,85$ $\quad$ $\varkappa_2 = 0{,}2940$

$D_1 = 5{,}057$ ($\parallel$ opt. Axe) $\quad$ ($\perp$ opt. Axe) $D_2 = 4.6946$

Curie fand für Quarz die Werthe:

$\parallel\ D_1 = 4{,}55$

$\perp\ D_2 = 4{,}49$

Romich und Nowak fanden, ohne eine bestimmte Richtung anzugeben:

$D = 4{,}6.$

Demnach erscheinen die von mir gefundenen Werthe etwas höher, als die bisher bestimmten, und zeigen untereinander eine grössere Verschiedenheit als die Curie'schen. Mit dem positiven Sinn der Doppelbrechung stimmen sie überein.

Turmalin.

Krystallklasse: Ditrig. pyr. [ält. Bezeichn.: Hexagonal rhomboëdr.].
Doppelbrechung: negativ.

Auch der Turmalin erwies sich als stark pyroelektrisch; doch zeigte sich bei ihm das parallel der optischen Axe geschnittene Stäbchen bedeutend empfindlicher als das senkrechte. Letzteres reagirte auf Temperaturänderungen sehr wenig. Dies stimmt mit der Thatsache überein, dass bei Turmalin die Polarität in der Richtung der optischen Axe auftritt, während in der dazu senkrechten Ebene keine Polarität nachgewiesen wurde. Messreihen hier vorzuführen hätte wenig Zweck, da die Erscheinungen in genau derselben Weise verlaufen, wie bei Quarz.

Die mit zwei gut gearbeiteten, cylindrischen Stäbchen,

aus klarem, dunkelgrünem Turmalin, ausgeführten Messungen, ergaben folgendes:

Turmalin ∥

$2a = 19{,}6$ mm
$2b = 2{,}576$ mm
$(0{,}83\ V) = 84{,}784$ mm³

$A = 0{,}38487$ $\quad M = 0{,}0048896$
$B = 6{,}0908$ $\quad E = 61{,}6.1{,}23$
$\eta = 0{,}991325$ $\quad d = 30$ mm

$s = 94{,}6$ mm
$\delta = 0^0\ 54'\ 11{,}5''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}19778 - 2$$

$$x_2 = \frac{-\ 7{,}024\,09\ x_1 + 2}{39{,}782\,7\ x_1 - 19{,}975\,43}.$$

Turmalin ⊥

$2a = 19{,}6$ mm
$2b = 2{,}468$ mm
$(0{,}83\ V) = 77{,}824$ mm³

$A = 0{,}314\,02$ $\quad M = 0{,}0048896$
$B = 6{,}126\,2$ $\quad E = 62{,}5.1{,}23$
$\eta = 0{,}992\,04$ $\quad d = 30$ mm

$s = 116$ mm
$\delta = 1^0\ 6'\ 26''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}286\,33 - 2$$

$$x_2 = \frac{18{,}258\,6\,x_1 + 2}{31{,}061\,1\,x_1 + 5{,}378\,16}$$

$x_1 = 0{,}440\,716$ $\quad x_2 = 0{,}487\,685$
$D_1 = 6{,}538\,2$ $\quad D_2 = 7{,}128\,44$

Auch hier zeigt sich Uebereinstimmung mit dem Sinne der Doppelbrechung.

Curie fand die Dielektricitätsconstanten:

∥ $D_1 = 6{,}05$
⊥ $D_2 = 7{,}10$

Kalkspath.

Krystallklasse: Ditrig. scal. [ält. Bezeichn.: Hexagonal rhomboëdr.].
Doppelbrechung: negativ.

Zu den Untersuchungen von Kalkspath wurden vier cylindrische Stäbchen verwendet, zwei parallel und zwei senk-

recht zur optischen Axe geschnitten. Diese Schnitte fielen leider nicht so schön und vollkommen cylindrisch aus wie bei Quarz und Turmalin, da der Kalkspath infolge seiner geringen Härte und leichten Spaltbarkeit ausserordentlich schwer zu bearbeiten ist. Das eine Paar der Schnitte zeigte sich ausserdem stark von Fissuren durchzogen, die von Geübten schon mit freiem Auge wahrgenommen werden konnten. Dies macht sich denn auch in der Verschiedenheit der Resultate, welche die beiden Paare lieferten, bemerkbar.

1. Paar.

Kalkspath ∥

$2a = 19{,}1$ mm
$2b = 2{,}30$ mm
$(0{,}83\ V) = 65{,}865$ mm^3

$A = 0{,}3378654$ $\quad M = 0{,}0048896$
$B = 6{,}1142$ $\quad E = 61{,}6 \,.\, 1{,}23$
$\eta = 0{,}99273$ $\quad d = 25$ mm
$s = 130$ mm
$\delta = 1^0\ 14'\ 26''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}33587 - 2$$

$$x_2 = \frac{-\ 5{,}668269\ x_1 + 2}{32{,}5135\ x_1 - 18{,}5724}$$

Kalkspath ⊥

$2a = 19{,}5$ mm
$2b = 2{,}35$ mm
$(0{,}83\ V) = 70{,}1983$ mm^3

$A = 0{,}337\,96$ $\quad M = 0{,}0048896$
$B = 6{,}109$ $\quad E = 60{,}72 \,.\, 1{,}23$
$\eta = 0{,}9927$ $\quad d = 25$ mm
$s = 159{,}2$ mm
$\delta = 1^0\ 31'\ 8''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}42386 - 2$$

$$x_2 = \frac{19{,}2754\ x_1 + 2}{36{,}5997\ x_1 + 6{,}78148}$$

$x_1 = 0{,}522052$ $\quad x_2 = 0{,}59882$
$D_1 = 7{,}5603$ $\quad D_2 = 8{,}4917$

2. Paar.

Kalkspath ∥

$2a = 19{,}2$ mm

$2b = 2{,}032$ mm

$(0{,}83\ V) = 51{,}6782$ mm³

$A = 0{,}278165$ $\qquad M = 0{,}0048896$

$B = 6{,}144$ $\qquad E = 62{,}5.1{,}23$

$\eta = 0{,}9944$ $\qquad d = 30$ mm

$s = 97{,}2$ mm

$\delta = 0^0\ 55'\ 41''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}20948 - 2$$

$$x_2 = \frac{-\ 4{,}20417\,x_1 + 2}{24{,}506\,x_1 - 17{,}0485}$$

Kalkspath ⊥

$2a = 17{,}8$ mm

$2b = 2{,}196$ mm

$(0{,}83\ V) = 59{,}57$ mm³

$A = 0{,}35034$ $\qquad M = 0{,}0048896$

$B = 6{,}1081$ $\qquad E = 62{,}7.1{,}23$

$\eta = 0{,}99237$ $\qquad d = 25$ mm

$s = 160{,}4$

$\delta = 1^0\ 31'\ 49''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}42713 - 2$$

$$x_2 = \frac{16{,}7418\,x_1 + 2}{21{,}7771\,x_1 + 3{,}82492}$$

$x_1 = 0{,}6530$ $\qquad x_2 = 0{,}71456$

$D_1 = 9{,}206$ $\qquad D_2 = 9{,}9794$

Man sieht, wie verschieden die Resultate dieser beiden Kalkspathkrystalle sind. Die letzteren, welche von dem fissurirten Krystalle stammen, sind natürlich als Werthe der Dielektricitätsconstanten unbrauchbar.

Die Uebereinstimmung mit dem optisch negativen Sinne des Kalkspathes zeigt sich bei beiden. — Andere Beobachter fanden für D folgende Werthe:

Curie: ∥ $D_1 = 8{,}03$

⊥ $D_2 = 8{,}48$

Romich u. Nowak: ∥ $D_1 = 7{,}5$

⊥ $D_2 = 7{,}7 - 8{,}4$

∥ $D_1 = 8{,}5$ } bei dauernder Ladung

⊥ $D_2 = 9{,}9$ }

Der Kalkspath zeigte sich, sowohl parallel als senkrecht zur optischen Axe, unabhängig von Temperaturänderungen. Die Messungen können daher ruhig direct nach einem Flammendurchschlag vorgenommen werden. Doch empfiehlt es sich speciell bei Kalkspath, die Flamme sehr schnell und vorsichtig zu handhaben, wenn das Springen des Krystalles vermieden werden soll. Dasselbe gilt für den ersten Vertreter der nun folgenden, zweiaxigen Krystalle, den Baryt.

Zweiaxige Krystalle.

Baryt.

Rhombisch. — Doppelbrechung: positiv.
a zweite Mittellinie (stumpfer Axenwinkel). b optische Normale.
c erste Mittellinie (spitzer Axenwinkel).

Die Messungen für Baryt wurden mit zwei Scheiben und zwei Stäbchen ausgeführt. Die Scheiben, deren eine die Axen a und b, die andere die Axen b und c enthielt, waren aus einem Krystall geschnitten, die Stäbchen, eines parallel a, das andere parallel b, ebenfalls. Die Scheiben, welche ehemals zu Elasticitätsmessungen im Mineralogischen Institut München gedient hatten, verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. Groth. Gerade diese Scheiben waren für meine Messungen ausserordentlich werthvoll. Wenn ein Krystall so auffallend grosse Verschiedenheiten der Dielektricitätsconstante in zwei verschiedenen Richtungen zeigt, wie es bei Baryt der Fall ist, so ist es bedeutend vertrauenerweckender, wenn man diese Unterschiede an einer einzigen Scheibe zeigen kann, nur dadurch, dass man dieselbe in zwei verschiedenen, einen rechten Winkel bildenden Richtungen aufhängt, als wenn man auf zwei verschiedene Schnitte angewiesen ist. Doch bevor ich auf eine weitere Besprechung eingehe, möchte ich die Ergebnisse der Messungen der beiden Krystalle vorführen.

Messungen mit zwei Scheiben.

Scheibe I. a/b.

$2a = 0{,}5$ mm	$\mathfrak{A} = 11{,}9353$
$2b = 15{,}0$ mm	$\mathfrak{B} = 0{,}31556$
$(0{,}83\ V) = 73{,}336$ mm^3	$\varepsilon = 29{,}9833$

Erste Aufhängung, Messung nach a.

$E = 60{,}9 \,.\, 1{,}23$ $\qquad$ $s = 153{,}5$ mm
$d = 25$ mm $\qquad$ $\delta = 1^0\ 27'\ 52{,}4''$

$$\log\left[\frac{-\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}40796 - 2$$

Zweite Aufhängung, Messung nach b.

$E = 60{,}7 \,.\, 1{,}23$ $\qquad$ $s = 230{,}5$ mm
$d = 25$ mm $\qquad$ $\delta = 2^0\ 11'\ 48{,}6''$

$$\log\left[\frac{-\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}58493 - 2$$

Scheibe II. b/c.

$2\,a = 0{,}5$ mm $\qquad$ $\mathfrak{A} = 11{,}923$
$2\,b = 14{,}7$ mm $\qquad$ $\mathfrak{B} = 0{,}32172$
$(0{,}83\ V) = 70{,}4325$ mm^3 $\qquad$ $\varepsilon = 29{,}383$

Messung nach c.

$E = 64{,}5 \,.\, 1{,}23$ $\qquad$ $s = 165{,}5$ mm
$d = 25$ mm $\qquad$ $\delta = 1^0\ 34'\ 43{,}6''$

$$\log\left[\frac{-\delta}{\cos 2\,\delta} = p\right] = 0{,}44078 - 2$$

Aus der Messung nach a ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{29{,}7186\, x_3 + 2}{60{,}421\,45\, x_3 + 5{,}216\,88}.$$

Aus der Messung nach c:

$$x_1 = \frac{5{,}197\,89\, x_3 - 2}{-60{,}096\,4\, x_3 + 29{,}6873}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$x_1 = 0{,}47537$ $\qquad$ $x_3 = 0{,}47718$
$D_1 = 5{,}9739$ $\qquad$ $D_3 = 6{,}99643$

Ferner aus der Messung nach b:

$$x_2 = \frac{27{,}7359\, x_3 + 2}{37{,}38045\, x_3 + 3{,}23418}$$

$$x_2 = 0{,}723175$$

$$D_2 = 10{,}0876$$

Auffallend ist hier der enorme Unterschied zwischen der Dielektricitätsconstanten in der Richtung der optischen Normalen und denjenigen, deren Richtungen in der Axenebene liegen. Man sollte erwarten, dass D_2 zwischen D_1 und D_3 liege, und zwischen letzteren eine grössere Verschiedenheit bestände. Ich nahm dieses Resultat mit grossem Misstrauen auf; doch ergaben wiederholte Versuche dasselbe, und neue Messungen mit zwei aus einem anderen Barytkrystall geschnittenen Stäbchen lieferten ähnliche Resultate, welche dieselbe Art der Verschiedenheit aufweisen. Leider war es nicht möglich, mit diesem zweiten Krystall eine vollständige Bestimmung nach allen drei Hauptrichtungen auszuführen, da sich aus demselben nur zwei Stäbchen herausschneiden liessen, und zwar nach den Richtungen a und b, also denjenigen, welche die grösste Verschiedenheit aufweisen.

Messungen mit zwei cylindrischen Stäbchen.

Baryt a.

$2a = 19{,}0$ mm — $A = 0{,}307575$

$2b = 2{,}15$ mm — $B = 6{,}1294$

$(0{,}83\ V) = 57{,}253$ mm³ — $\eta = 0{,}99358$

$E = 62{,}16.1{,}23$ — $s = 104{,}68$ mm

$d = 25$ mm — $\delta = 0^0\ 59'\ 59''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}24206 - 2$$

$$x_2 = \frac{-6{,}35415\, x_1 + 2}{36{,}8035\, x_1 - 19{,}2281}.$$

Baryt b.

$2a = 19{,}4$ mm — $A = 0{,}2875$

$2b = 2{,}1$ mm — $B = 6{,}1394$

$(0{,}83\ V) = 55{,}77$ mm³ — $\eta = 0{,}9941$

$E = 62{,}8.1{,}23$ — $s = 208$ mm

$d = 25$ mm — $\delta = 1^0\ 58'\ 59''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}54018 - 2$$

$$\varkappa_2 = \frac{15{,}76676\,\varkappa_1 + 2}{16{,}8808\,\varkappa_1 + 2{,}91296}.$$

$\varkappa_1 = 0{,}488065$	$\varkappa_2 = 0{,}8682_{55}$
$D_1 = 7{,}1324$	$D_2 = 11{,}910$

Hier zeigt sich derselbe auffallende Unterschied wie bei dem erstbesprochenen Krystall, doch ergaben sich die Werthe grösser als bei diesem. Dies könnte von einer etwaigen Beeinflussung der Aufhängevorrichtung im zweiten Falle herrühren; doch ergaben an verschiedenen Tagen mit der Aufhängevorrichtung allein angestellte Versuche, dass keine nachweisbare Beeinflussung vorhanden war. Auch zeigten sich die beiden Barytstäbchen ebenso rein und farblos wie die Scheiben, und konnte ich auch durch mikroskopische Untersuchung keine Risse oder Einschlüsse nachweisen.

Auf Grund dieses einen Beispieles zu behaupten, dass Krystalle, mit sonst gleichen physikalischen Eigenschaften, verschiedene Dielektricitätsconstanten haben können, wäre gewagt. Für die Leitfähigkeit der Krystalle hat Curie[1]) nachgewiesen, dass sie bei gleichen Krystallen ausserordentliche Verschiedenheit zeigt; es ist nicht unmöglich, dass auch für die Dielektricitätsconstante eine solche Verschiedenheit in geringerem Maasse besteht. Sicheres hierüber liesse sich erst sagen, wenn diesbezügliche, vergleichende Messungen an farblosen Krystallen derselben Materie von gleichem und verschiedenem Fundort angestellt wären, die sich auf eine Reihe von Krystallen erstrecken müssten.

Was nun die unerwartet hohe Verschiedenheit zwischen D_2 und D_1, D_3 betrifft, sowie die geringe Differenz zwischen D_1 und D_3, so lässt sich hier eine Beziehung zwischen den Dielektricitätsconstanten und den Quadraten der Brechungsindices gar nicht mehr erkennen, da der Gang der Verschiedenheit ein völlig anderer geworden ist. Es erscheint hier die optische Normale als Hauptsymmetrieaxe, um welche in der Axenebene nahezu dielektrische Gleichheit herrscht.

Leider war es mir nicht möglich, dieses Verhalten noch bei anderen zweiaxigen Krystallen zu untersuchen; wohl aber bot sich noch ein Beispiel für die auffallende Verschiedenheit zwischen D_2 und D_1, und zwar beim Aragonit.

[1]) Curie, Ann. de chim. et de phys. 6. Serie 18. p. 212, 236, 240 und 258. 1889.

Aragonit.

Rhombisch. — Doppelbrechung: negativ.
a erste Mittellinie (spitzer Axenwinkel). b optische Normale.
c zweite Mittellinie (stumpfer Axenwinkel).

Es war schwer, einen zur Herstellung der Schnitte geeigneten Aragonitkrystall ausfindig zu machen, da die meisten Krystalle dieses Minerales von Zwillingslamellen durchzogen sind. Und leider war es unmöglich, aus dem zur Verfügung stehenden reinen Krystall, der frei von diesem Nachtheil war, mehr als zwei Schnitte, und zwar Stäbchen, herzustellen, sodass der Aragonit nur nach zwei Hauptrichtungen a, b untersucht werden konnte. Die Messungen ergaben folgendes:

Aragonit a.

$2a = 16{,}4$ mm
$2b = 2{,}25$ mm
$(0{,}83\ V) = 54{,}121\,25$ mm³
$A = 0{,}409\,58$ $\qquad E = 62{,}5 \,.\, 1{,}23$
$B = 6{,}078\,5$ $\qquad d = 20$ mm
$\eta = 0{,}990\,56$
$s = 115{,}2$
$\delta = 1^0\ 5'\ 58''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}283\,17 - 2$$

$$\varkappa_2 = \frac{-\ 8{,}647\,5\,\varkappa_1 + 2}{48{,}686\,76\,\varkappa_1 - 21{,}623\,6}.$$

Aragonit b.

$2a = 16{,}3$ mm
$2b = 2{,}3$ mm
$(0{,}83\ V) = 56{,}209$ mm³
$A = 0{,}426\,97$ $\qquad E = 62{,}4 \,.\, 1{,}23$
$B = 6{,}069\,7$ $\qquad d = 20$ mm
$\eta = 0{,}990\,0$
$s = 223{,}2$
$\delta = 2^0\ 7'\ 39''$

$$\log\left[\frac{\delta}{\cos 2\delta} = p\right] = 0{,}570\,92 - 2$$

$$\varkappa_2 = \frac{17{,}194\,9\,\varkappa_1 + 2}{23{,}343\,4\,\varkappa_1 + 4{,}201\,5}$$

$\varkappa_1 = 0{,}398\,765$ $\qquad \varkappa_2 = 0{,}648\,107$
$D_1 = 6{,}011\,6$ $\qquad D_2 = 9{,}144\,3$

Das verschiedene Verhalten nach den Richtungen a und b tritt hier ebenso deutlich auf, wie bei Baryt. Die Ausschläge

der fast gleich dimensionirten Stäbchen bezüglich der Richtung der optischen Normale sind beinahe doppelt so gross wie diejenigen nach der in der Axenebene liegenden Richtung a. —

Eine Theorie aus dieser Erscheinung zu entwickeln, erscheint noch verfrüht. Sie liesse sich voraussichtlich, an Hand der Theorie der Raumgitter und der Sohncke'schen regelmässigen Punktsysteme, auf die verschiedenartige Anordnung leitender und nichtleitender Molecüle nach verschiedenen Richtungen in dem Krystall stützen. Man könnte sich hierbei an die Art anlehnen, nach welcher Warburg[1]) den Quarz als eine sehr verdünnte feste Lösung eines Elektrolytes (Na_2SiO_3) betrachtet, welcher nur nach einer bestimmten Richtung im Krystalle eine ununterbrochene Anordnung hat. Doch sind dies einstweilen nur vage Betrachtungen, die weit entfernt sind, zur Aufstellung einer Hypothese zu genügen. —

Die in vorliegender Arbeit gefundenen Dielektricitätsconstanten seien hier noch in einer Tabelle zusammengestellt.

Tabelle.

+ Quarz ∥ zur optischen Axe . .	$D_1 = 5{,}057$
Quarz ⊥ „ „ „ . .	$D_2 = 4{,}694$
− Turmalin ∥ „ „ „ . .	$D_1 = 6{,}5382$
Turmalin ⊥ „ „ „ . .	$D_2 = 7{,}1284$
− Kalkspath ∥ „ „ „ . .	$D_1 = 7{,}5603$
Kalkspath ⊥ „ „ „ . .	$D_2 = 8{,}4917$
+ Baryt a zweite Mittellinie . . .	$D_1 = 6{,}9739$
Baryt b optische Normale . . .	$D_2 = 10{,}0876$
Baryt c erste Mittellinie	$D_3 = 6{,}9964$
+ Baryt a zweite Mittellinie . . .	$D_1 = 7{,}1324$
Baryt b optische Normale . . .	$D_2 = 11{,}9100$
− Aragonit a erste Mittellinie . .	$D_1 = 6{,}0116$
Aragonit b optische Normale . .	$D_2 = 9{,}1443$
Schwefel gegossen	$D = 4{,}0487$
Paraffin gegossen	$D = 2{,}4574$

Am Schlusse meiner Arbeit möchte ich es nicht versäumen, meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Prof. v. Lommel, Prof. Graetz und Prof. Groth meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für die gütige Unterstützung und Förderung, die mir von ihrer Seite während der Arbeit allzeit zu Theil wurde.

[1]) Warburg und Tegetmeier, Wied. Ann. 35. p. 455. 1888.